APRIL/MAY 2024

CMA21/FMA21 — CALCULUS

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

Time : Three hours Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Find the n^{th} derivative of $\sin(ax+b)$.

   $\sin(ax+b)$ என்பதன் nவது வகைக்கெழு கண்டறிக.

2. What is the necessary condition for a maximum value of a function of two variables?

   ஒரு சார்பின் இரண்டு மாறிகளின் அதிகபட்ச மதிப்புக்கு தேவையான நிபந்தனை என்ன?

3. Write the polar equation of a straight line.

   ஒரு நேர்கோட்டின் துருவ சமன்பாட்டை எழுதுக.

4. How do you find the angle of intersection between two curves which are given in polar coordinates.

   துருவ ஆயங்களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு வளைவுகளுக்கு இடையில் வெட்டும் கோணத்தை எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பது.

5. Find the coordinate of the center of curvature of the curve $xy = 2$ at the point (2,1).

$xy = 2$ என்ற வளைவின் வளைவு மையத்தை (2, 1) என்ற புள்ளியில் அதன் ஆயத்தொலையை கண்டறி.

6. What do you mean by evolute of curves?

ஒரு வளைகோட்டின் மலரி என்று நீவிர் எதை குறிப்பிடுவீர்.

7. Find $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^5 x \, dx$.

கண்டுபிடி : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^5 x \, dx$

8. Prove that $\beta(m,n) = \beta(n,m)$.

$\beta(m,n) = \beta(n,m)$ என நிரூபி.

9. Evaluate $\int_0^a \int_0^b y^2 \, dx \, dy$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^a \int_0^b y^2 \, dx \, dy$.

10. Write any two applications of multiple-integral.

பல்வகை – தொகைக்கெழுவின் ஏதேனும் இரண்டு பயன்பாடுகளை எழுதவும்.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that if $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, then $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$.

$y = \sin(m \sin^{-1} x)$ எனில் $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) If $u = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$ where $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, then find the minimum value of u.

$u = a^3x^2 + b^3y^2 + c^3z^2$ எனில் $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, பின்னர் u இன் குறைந்தபட்ச மதிப்பைக் கண்டறி.

12. (a) Find the angle at which the radius vector cuts the curve $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta$.

ஒரு வளைவு ஆரம் $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta$ எனும் வளைவை வெட்டும் கோணத்தைக் கண்டறிக.

Or

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Find the maximum or minimum values of $2(x^2 - y^2) - x^4 + y^4$.

$2(x^2 - y^2) - x^4 + y^4$ இன் பெரும அல்லது சிறும மதிப்புகளைக் கண்டறியவும்.

17. Find the radius of curvature of the cardioid $r = a(-1\cos\theta)$.

$r = a(-1\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுப்பை வடிவ வளைவின் ஆரம் கண்டுபிடிக்கவும்.

18. Show that the evolute of the cycloid $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ is another cycloid.

ஒரு வட்டப்புள்ளி நெறிவளைவு $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ இன் மலரியானது மற்றொரு வட்டப்புள்ளி நெறிவளைவு ஆகும்.

19. Prove that $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

20. Evaluate $\iiint xyz\, dx\, dy\, dz$ taken through the positive octant of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் நேர்மறை எட்டிலொரு வில்வரை மூலம் எடுக்கப்பட்ட $\iiint xyz\, dx\, dy\, dz$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(b) Show that the radius of curvature at any point of the catenary $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ is equal to the length of the portion of the normal intercepted between the curve and the axis of x.

$y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ என்ற சங்கிலியத்தின் எந்தப் புள்ளியிலும் வளைவு ஆரத்தின் மதிப்பு வளைவு மற்றும் x அச்சுக்கு இடையில் வெட்டப்பட்ட செங்குத்துப் பகுதியின் நீளத்திற்கு சமம்.

13. (a) Find the envelope of the circles drawn on the radius vectors of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ as diameter.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற விட்டம் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் ஆரம் திசையன்களில் வரையப்பட்ட வட்டங்களின் உறையைக் கண்டறியவும்.

Or

(b) Find the asymptotes of $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2xy + y - 1 = 0$.

$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2xy + y - 1 = 0$ இன் அணுகுகோடுகளைக் கண்டறியவும்.

14. (a) Establish a reduction formula for $\int \sin^n x\,dx$.

$\int \sin^n x\,dx$ க்கான குறைப்பு சூத்திரத்தை காணவும்.

Or

(b) Evaluate $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

மதிப்பிடுக $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

15. (a) Change the order of integration in $\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} xy\,dx\,dy$ and evaluate it.

$\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} xy\,dx\,dy$ உள்ள தொகைநுண் வரிசையை மாற்றவும் மற்றும் அதை மதிப்பிடவும்.

Or

(b) Find the volume of a segment of height h of a sphere of radius a.

ஆரம் a மற்றும் உயரம் h கொண்ட கோளத்தின் ஒரு வெட்டுத்துண்டு பகுதியின் கனஅளவைக் கண்டறியவும்.